

O QUE A HISTÓRIA DO DESENVOLVIMENTO DO CÁLCULO PODE NOS ENSINAR QUANDO QUESTIONAMOS O SABER MATEMÁTICO, SEU ENSINO E SEUS FUNDAMENTOS

Renata C. Geromel Meneghetti
USP – Brasil
Irineu Bicudo
UNESP – Brasil

(encaminhado em Novembro de 2001)

Resumo

Focalizando, principalmente, a história do desenvolvimento do cálculo, o presente artigo tem por propósito mostrar que existe uma profunda relação entre o caminhar da filosofia da matemática, o da história da matemática, o da própria matemática e em conseqüência, o da educação matemática. Quando direcionamos nosso olhar para a história da filosofia da matemática, de Platão ao século XVIII, evidenciam-se claramente duas vertentes filosóficas: o empirismo e o racionalismo. Por todo esse período, exceto em Kant, essas correntes se posicionaram como contrárias e excludentes, ou seja, enquanto uma defendia que a base do conhecimento jaz unicamente na experiência, a outra defendia que permanece unicamente na razão. Contradizendo as posições reducionistas dessas duas linhas filosóficas, a história do desenvolvimento do cálculo será aqui focalizada para explicitar, não somente que a produção matemática sofre influência da filosofia da matemática, como também, e principalmente, para mostrar que o cálculo se desenvolveu mediante a contribuição (de forma complementar) de ambas, empirismo e racionalismo; o que nos leva a defender (ou aderir à posição de) que, no processo de constituição do saber matemático, o aspecto lógico (vertente do racionalismo) e o intuitivo/empírico (vertente do empirismo) devem ser considerados equilibradamente. Do ponto de vista educacional, esse estudo vai ao encontro de pesquisas que defendem, no ensino do cálculo e da análise, a importância de se ter esse equilíbrio, como é o caso da que foi realizada recentemente por Reis (2001).

Abstract

This paper, the main focus of which is the history of the development of calculus, aims to show that the ways followed by philosophy of mathematics, history of mathematics, mathematics itself and, consequently, mathematical education, are profoundly related. When we observe the history of the philosophy of mathematics, from Plato to the eighteenth century, two philosophical currents become evident: empiricism and rationalism. All the way

long, except for Kant, these currents were opposed and excludent, that is, while one defended that knowledge rests only on experience, the other stated that it remains only on reason. Contradicting the reductional point of view of these two currents, the history of the development of calculus will be focused here to explain that mathematical production is influenced by philosophy of mathematics, and, mainly, to show that the desenvolvimento of calculus received contributions of both empiricism and rationalism, in a complementary way. This lead us to defend that, in the process of constitution of mathematical knowledge, the logical aspect - the way of rationalism - and the intuitive/empiric aspect - the way of empiricism - should be considered with equilibrium. From the educational point of view, this study has affinity with the researches that defend the importance of this equilibrium in teaching calculus and analysis, like the one recently carried out by Reis (2001).

Sobre os rumos da Filosofia da Matemática

De Platão ao século XVIII, quando buscamos a constituição do saber matemático, exceto em Kant, é possível caracterizar duas vertentes filosóficas: (i) aquela que busca fundamentar o saber matemático, inteiramente, na razão. Isso está presente no realismo platônico, no idealismo de Descartes e também no racionalismo de Leibniz; (ii) aquela que busca basear esse conhecimento, exclusivamente, na intuição ou experiência; destaca-se, nessa linha, o empirismo inglês com os trabalhos realizados por Newton, Locke, Berkeley e Hume.

Atentos para o papel que a razão¹ e a intuição² [sensível (experiência) e intelectual] desempenham no processo de elaboração do conhecimento matemático, foi possível obter as seguintes constatações:

Na teoria de Platão (427-347 a.C.), somente as idéias são verdadeiras, tudo o que o mundo oferece aos sentidos é considerado como falso e ilusório. A ciência deve ter por objeto o ser real, isto é, as idéias; nosso conhecimento consiste em elevar-nos, por meio da dialética do mundo sensível a uma intuição intelectual desse mundo supra-sensível, composto de Idéias.

Portanto, no realismo platônico, o conhecimento permanece unicamente no mundo inteligível, ou seja, na razão.

Descartes (1596-1650), em seu idealismo, concebeu como únicas fontes do conhecimento a intuição intelectual³ e a dedução⁴. Entendeu o mundo sensível como composto de pensamentos obscuros e confusos, que davam margem à dúvida; por esse

¹ Referindo-se ao aspecto lógico do conhecimento.

² Compreendendo tanto a intuição sensível (ou seja, aquela que se dá através da experiência), como a intelectual (ou seja, que independe da experiência).

³ Por intuição intelectual esse filósofo entendeu o conceito da mente pura, que nasce apenas da luz da razão, e na qual não se propaga nenhuma dúvida.

⁴ A dedução foi compreendida como aquilo que se conclui necessariamente de outras coisas conhecidas, com certeza. (Cf. Descartes, 1989a, pp. 78 e 81).

motivo, refutou a experiência como fonte de conhecimento.⁵ Buscou fundamentar a ciência em princípios racionais e lógicos.

Em Descartes, a razão é vista como um instrumento de descoberta e empregada como um ser ideal.

Também para o matemático alemão Leibniz (1646-1716), a certeza do conhecimento não pode ser oriunda da experiência, mas jaz unicamente na razão.⁶

A experiência proporciona as verdades de fato que são confusas e obscuras. O ideal do conhecimento é o conhecimento necessário, o qual nos fornece as verdades da razão, que são inatas, virtualmente impressas e independentes da experiência.

O que vamos conhecer na vida já está dado e contido em nossa própria alma.⁷ Assim, tal como no platonismo, aprender matemática consiste em fazer acordar a matemática que está latente em cada um de nós.⁸

Leibniz considerou que o conhecimento será cada vez mais racional quanto mais for matemático. A necessidade das descobertas em matemática é vista a partir de sua forma: “o conhecimento que não é evidente por si mesmo se adquire através de conseqüências, as quais só são corretas quando possuem sua forma devida”.⁹

Por outro lado, Newton, Locke, Berkeley e Hume defenderam uma posição oposta às descritas acima, a saber, que o fundamento da ciência está na experiência, e que tudo está sujeito a ela, inclusive a matemática.

Assim, para o filósofo-matemático Newton (1643-1727), a ciência constitui-se em um corpo de verdades absolutamente seguro a respeito do mundo natural.

A matemática tinha por fim propiciar uma explicação para os fenômenos observados, e deveria moldar-se em função da experiência; por esse motivo, não concebeu, na matemática, a existência de certezas absolutamente *a priori*. As leis matemáticas eram, não somente dedutíveis dos fenômenos físicos, como também verificáveis por meio de tais fenômenos.

O empirista inglês Locke (1621-1704) concebeu que todas as nossas idéias são derivadas ou da *sensação* (experiência exterior) ou da *reflexão* (experiência interior).

Considerou o conhecimento intuitivo como o mais claro e o mais seguro, a certeza dos demais conhecimentos. Por outro lado, o conhecimento demonstrativo foi concebido como um conhecimento obscuro, por não proporciona, segundo sua teoria, uma certeza imediata¹⁰.

O filósofo Berkeley (1685-1753) pretendeu reduzir o conhecimento à vivência ou à percepção. Assim, as idéias não existem por si sós, suas existências consistem em serem percebidas. Também a matemática possui existência apenas no espírito e, portanto, os objetos dessa ciência devem ser percebidos.¹¹

⁵ O sentido, a memória e a imaginação foram considerados como qualidades secundárias.

⁶ Cf. Leibniz, 1996, p.371.

⁷ Cf. Leibniz, 1996, p.22.

⁸ Cf. Leibniz, 1996, pp. 389-390.

⁹ Cf. Leibniz, 1996, p. 491.

¹⁰ Cf. Locke, 1980, p.310.

¹¹ Cf. Berkeley, 1980, p.437.

Por fim, com Hume (1711-1776), o empirismo atinge seu ponto culminante. Para ele o pensamento é constituído de percepções, as quais se reduzem a duas classes distintas: (i) as impressões, que são os elementos primitivos da experiência; (ii) os pensamentos (ou as idéias), que são cópias de nossas impressões.

Entendeu por prova os argumentos derivados da experiência, que não davam lugar à dúvida ou à oposição. Tais argumentos são fundamentados exclusivamente no hábito, princípio de todas as nossas conclusões derivadas da experiência.

Como uma crítica a essas duas linhas filosóficas, surge o idealismo transcendental de Emanuel Kant (1724-1804), defendendo que a ciência não pode ser constituída por juízos analíticos¹², como queria Leibniz, pois, se assim o fosse, ela seria vã; e, por outro lado, a ciência também não pode ser constituída por juízos sintéticos¹³, como queria Hume, pois, dessa forma, não seria ciência, mas um costume sem fundamento, não teria validade necessária e universal.

Portanto assumiu uma posição intermediária ao argumentar que o conhecimento, parte da experiência (trata-se aqui do que denominou de sintético); entretanto, deve tornar-se independente dela, pois a ciência deve ser universal e necessária (essas são as condições *a priori* do conhecimento). Os juízos científicos, em particular os da matemática, são, pois, de natureza sintética e *a priori*.

O fato que importa-nos aqui é destacar que, de certa forma, na filosofia de Kant, há um apontamento de que empirismo e racionalismo, enquanto correntes contrárias, não são insuficientes para fundamentar o saber matemático.

Mas, esse fato, mais do que apontado por uma filosofia, pode também ser constatado no desenvolvimento histórico do cálculo.

Num relance sobre a história do desenvolvimento do cálculo, veremos que, a partir de Descartes, tal como na filosofia, é possível identificar, no desenvolvimento do cálculo, dois rumos. De um lado há uma posição mais empírica com Hobbes, Barrow e Newton. De outro, há uma preocupação com a aritmetização e formalização, destacando-se Wallis, Gregory e Leibniz.

Sobre a História do desenvolvimento do Cálculo

A germinação da geometria analítica por Descartes e Fermat (1601-1665) foi o passo final na preparação para a nova matemática infinitesimal. Com a geometria analítica, novas curvas puderam ser descobertas e estudadas.

Antes, todas as antecipações de métodos do cálculo, que tinham sido consideradas, eram relacionadas à geometria. As séries infinitas foram muitas vezes utilizadas, mas eram derivadas de representações geométricas dos problemas estudados. Linhas, superfícies e

¹² Os juízos analíticos em Kant são aqueles nos quais o conceito do predicado está contido no sujeito. Tais juízos jazem no princípio da identidade, pois o predicado, contido no sujeito, não fará mais que repetir aquilo que há no sujeito. Tais juízos são verdadeiros em virtude de sua forma.

¹³ Os juízos sintéticos são aqueles nos quais o conceito do predicado não está contido no conceito do sujeito, i.e., acrescentam ao conceito do sujeito um predicado que nele não está pensado e dele não poderia ser extraído por qualquer tipo de decomposição. Tais juízos são fundamentados na experiência (percepção sensível).

sólidos infinitesimais haviam sido utilizados; no entanto, não os números infinitesimais. Aristóteles havia negado o infinitamente pequeno em aritmética; isto porque, uma vez que número era concebido como coleção de unidades, nenhum deles poderia ser menor do que a unidade. Como resultado da álgebra e da geometria analítica dos séculos XVI e XVII, esta atitude vinha sendo modificada.

Os números infinitesimais surgiram primeiro por meio de alguns problemas com os quais Fermat se envolvia.

Foi isto que levou Fermat a formular seu famoso método para a determinação de máximos e mínimos¹⁴, uma contribuição fundamental para o cálculo. Ele proporcionou a introdução dos infinitesimais na análise; no entanto, seu propósito era o de encontrar soluções para problemas geométricos e apresentar um tipo de argumento significativo por si mesmo.

Em 1636, Fermat obtem sucesso ao aplicar seu método na determinação da reta tangente a uma curva dada. A característica do procedimento de Fermat assemelha-se mais estreitamente à resolução dos problemas de máximos e mínimos analisando o comportamento de uma função próximo a seus valores extremos¹⁵.

Descartes, em sua produção matemática inicial (1618), tratou das leis dos corpos que caem por meio dos infinitesimais¹⁶. Alguns anos depois, em 1632, Descartes respondeu corretamente um número de questões, que Mersenne lhe enviara, sobre áreas, volumes e centros de gravidade, conectadas com as parábolas $y^n = px$. Tais problemas eram similares aos que foram resolvidos por Fermat.

Descartes era um forte crítico dos trabalhos de Fermat; em particular, não concordava com o método de tangentes desse último. Isso levou o a se envolver com essa questão. Na ocasião, ele apresentou um método para obtenção da tangente, com intuito de corrigir o de Fermat¹⁷, interpretando-a em termos de igualdade de raízes e pontos

¹⁴ A fim de determinar como subdividir um segmento de linha de comprimento a , em dois segmentos x e $(a-x)$, cujo o produto $A = x(a-x) = ax - x^2$ seja máximo (i.e., encontrar o retângulo com perímetro $2a$ que tenha área máxima). Se primeiro substituirmos x por $x + E$, a área será $A = (x + E)(a - x - E)$. Para a área máxima os dois valores serão os mesmos, i.e., os pontos x e $x + E$ coincidem. Conseqüentemente, estabelecendo os dois valores de A iguais um ao outro (trata-se de uma pseudo-igualdade) obtemos: $a(x+E) - (x+E)^2 = ax + aE - x^2 - 2xE - E^2 \sim ax - x^2$; cancelando os termos iguais e dividindo tudo por E , obtemos $(2x + E) \sim a$. Finalmente ele descartou o termo que permaneceu contendo E , transformando a pseudo-igualdade em uma verdadeira igualdade, resultando $x = a/2$. O processo que Fermat utilizou é quase precisamente o que atualmente aparece em cálculo diferencial, exceto que o símbolo Δx (ou ocasionalmente h) é substituído por E .

¹⁵ Isto poderia ser dito de uma forma matemática mais moderna como segue: se $f(x)$ é o valor máximo (ou mínimo) de uma função f , então parece, num sentido intuitivo ou figurativo, que o valor de f muda muito vagarosamente próximo de x . Portanto se e é extremamente pequeno, então $f(x)$ e $f(x+e)$ são aproximadamente iguais, ou seja $f(x+e) \sim f(x)$, ou que $f(x+e) - f(x) \sim 0$. Se $f(x)$ é uma curva polinomial então $f(x+e) - f(x)$ poderá ser divisível por e , fazendo esta divisão, obtemos

$[f(x+e) - f(x)] / e \sim 0$. Mas o limite desse quociente, quando e tende a 0, é a definição moderna de derivada. No entanto, é bom enfatizar que Fermat não exigiu explicitamente que e fosse "pequeno", e também nada disse com respeito a tomar o limite disso tudo, quando e aproxima-se de 0.

¹⁶ Ao considerar a força que atrai um corpo, Descartes usou frases do tipo: "primeiro instante de seu movimento" e "primeira velocidade imaginável".

¹⁷ Descartes demonstra que seu método é aplicável não somente à parábola como também à elipse e à hipérbole.

coincidentes¹⁸. Seu método era puramente algébrico e não envolvia, manifestamente, nenhum conceito de limite ou infinitesimal.

A noção de variável, como primeiro enfatizada explicitamente por Descartes e Fermat, foi indispensável para o desenvolvimento do cálculo. As visões de Descartes e Fermat em relação aos infinitesimais eram bastante distintas. Fermat via as vantagens práticas do método infinitesimal, ao passo que Descartes atentava para os erros vinculados a tal método. O receio de Descartes era justificado pela falta de uma base teórica clara para o raciocínio infinitesimal.

Apesar desse fato, em 1638, ao utilizar o conceito de centro instantâneo de rotação, Descartes fez uso indireto de limite e infinitesimal, quando procurava a tangente de uma curva não - algébrica¹⁹. Na ocasião, esse trabalho de Descartes foi considerado como um avanço da idéia de uma quantidade infinitamente pequena em matemática, e o uso desta no lugar de concepções mecânicas e algébricas.

O método analítico, de Fermat e Descartes, foi utilizado pelo matemático inglês John Wallis (1616-1703), predecessor de Newton que mais se aproximou da definição de limite.

Aos poucos, vai se caracterizando, no desenvolvimento do cálculo, semelhantemente ao que ocorrera na filosofia geral, dois caminhos: o empirismo e o racionalismo. Depois que definições claras foram sendo formuladas, alguns matemáticos buscaram estabelecer o cálculo sobre conceitos aritméticos, em vez de sobre geométricos. O trabalho de Wallis foi uma tentativa no sentido de uma tal aritmetização. Com respeito a isso, ele ganhou apoio de seu contemporâneo James Gregory (1638-1675). Entre outras coisas, Gregory expôs a passagem do limite como uma operação aritmética independente, apropriada para definir novos números não pertencentes aos irracionais ordinários.

Com uma posição completamente oposta, havia também os que pretendiam apresentar soluções dos problemas em questão, por meio de considerações geométricas; entre esses se encontram o filósofo Thomas Hobbes (1588-1651), e o matemático e teólogo Isaac Barrow (1630-1677).

Hobbes procurava uma base intuitiva satisfatória para o cálculo e via a matemática como uma idealização da percepção sensorial. Apresentou objeções aos que aplicavam a álgebra à geometria e também à tendência de aritmetização do cálculo. Impressionado com o sucesso da concepção de Galileu (1564-1642), sobre as leis do movimento em termos da inércia e mudança de velocidade, desejou explicar tais idéias em termos metafísico e geométrico, e para tal introduziu o conceito de *conatus*²⁰. Hobbes falou do *conatus* como o movimento em um intervalo infinitamente pequeno, menor que qualquer outro dado, ou seja, no ponto. Embora ele não tenha tido sucesso na definição desse conceito, o nominalismo excessivo de Hobbes levou os matemáticos a afastarem-se de uma visão puramente abstrata dos conceitos matemáticos, tal como a exibida por Wallis, induzindo-os a buscar, durante mais de um século, uma base intuitivamente satisfatória para o cálculo.

¹⁸ Tal método consiste em traçar um círculo passando por dois pontos da curva, com centro no eixo x, e marcar os pontos de interseção. O centro do círculo torna-se o ponto no eixo x no qual a normal à curva passa, e a tangente é conseqüentemente conhecida.

¹⁹ Por exemplo, a tangente de um cicloide.

²⁰ *Conatus*: o princípio do movimento; análogo ao conceito de ponto como o princípio da extensão em geometria.

Isaac Barrow também criticou a aritmetização de Wallis, tanto quanto a geometria analítica de Descartes. Valorizava a evidência sensorial, sendo seu ponto de vista essencialmente infinitesimal; em sua matemática, as proposições eram apoiadas em formas geométricas, em lugar de no simbolismo analítico.

Sustentou a concepção clássica de números e geometria²¹. Barrow pensava em termos de problemas geométricos e infinitesimais, e não em termos de funções e símbolos para variáveis contínuas.

Até esse ponto do desenvolvimento do cálculo, importantes progressos foram alcançados. Por exemplo, o teorema fundamental, que explicitamente estabelece a relação entre a tangente e a área (ou, em termos atuais, entre a derivada e a integral), foi estabelecido e provado como teorema geométrico por Barrow; no entanto, este último, não reconheceu que tal teorema era de fato fundamental e proporcionaria a base para um novo campo da matemática.

A Newton e Leibniz é creditado o título de “inventores do cálculo”, porque eles reconheceram o “teorema fundamental do cálculo” como um fato matemático, e também porque utilizaram tal teorema para purificar a rica mistura de técnicas infinitesimais precedentes.

Ademais, com Newton e Leibniz podemos ver, expressamente, a solidificação das duas correntes antes expostas: o empirismo, nos trabalhos de Newton e o racionalismo, nos de Leibniz.

Newton foi aluno de Barrow. Por sua vez, este último estava familiar com o trabalho de Cavalieri e com as duas visões da generalização de grandezas geométricas lá apresentadas: a dos indivisíveis e a das quantidades que fluem. Barrow pensou na tangente a uma curva como a direção do movimento de um ponto, o qual, movendo-se, gera a curva. Newton, no período em que estava elaborando seu cálculo fluxionário, por meio de suas leituras de Barrow, havia se familiarizado com tais posições e também descoberto o teorema binomial. Em suas primeiras notas sobre o cálculo, usou o infinitamente pequeno, tanto geométrica como analiticamente²². Utilizou a idéia de um retângulo infinitamente pequeno ou “momento” de área e encontrou as quadraturas da curva como segue:

Trace uma curva de modo que, para a abscissa x e a ordenada y a área seja $z = [n/(m + n)] a x^{(m+n)/n}$. Deixe o momento ou infinitesimal crescente na abscissa ser o . A nova abscissa será então $x+o$ e a área aumentada $z + \sigma y = [n/(n+m)] a (x+o)^{(n+m)/n}$. Se nesta expressão aplicarmos o teorema binomial e o dividirmos por o e, então, omitirmos os termos que ainda contém o o , o resultado será $y = ax^{m/n}$. Isto é, se a área for dada por $z = [n/(m+n)] a x^{(m+n)/n}$, a curva será $y = a x^{m/n}$. Inversamente se a curva é $y = a x^{m/n}$, a área será $z = n/(n+m) a x^{(n+m)/n}$.

²¹Mantendo um ponto de vista euclideo, para ele o número tem existência real própria e não é independente da quantidade geométrica contínua. A geometria inclui a aritmética e a lógica, a álgebra.

²²Newton iniciou seus trabalhos buscando fundamentação para as três seguintes questões: o cálculo, a natureza da luz e a teoria da gravitação. Suas obras referentes à mecânica e à ótica, a saber, o *Principia Mathematica* e a *Opticks* foram publicadas ainda em vida, 1689 e 1704, respectivamente; no entanto, suas contribuições para a matemática pura, entre elas as referentes ao cálculo, foram publicadas somente depois de sua morte.

Aqui a área expressa foi obtida considerando o seu crescimento momentâneo no ponto em questão. Assim, enquanto as técnicas infinitesimais prévias haviam sido baseadas na determinação de uma área como o limite de uma soma, Newton determina primeiro a razão de mudança da área, e então calcula a área por antidiferenciação da função com respeito à ordenada. O processo para ele fundamental é o de determinação da razão de mudança²³.

Embora tal relação fosse conhecida por matemáticos do tempo de Torricelli e Barrow, foi Newton quem primeiro deu a ela um procedimento geralmente aplicável para determinar a razão instantânea de mudança²⁴ e inverter isto, no caso de problemas envolvendo somatórias. Antes disso, a tendência era em direção oposta, i.e., reduzir problemas, quando possível, a determinação de quadraturas.

Na demonstração de que a área de $y = a x^{m/n}$ é dada por $z = [n / (n+m)] a x^{(n+m)/n}$, a ordenada y representa a velocidade de crescimento da área e a abscissa representa o tempo. O produto da ordenada por um intervalo pequeno da base dará uma porção pequena da área e a área total sob a curva é a soma de todos esses momentos de área. Tal concepção infinitesimal é a mesma que a de Oresme (1325-1382), Galileu e Descartes, nas demonstrações das leis do corpo que cai, exceto pelo fato de que eles encontraram a área como um todo, através da adição de tais elementos, enquanto que Newton encontra a área da razão de mudança num único ponto. Também a concepção de razão instantânea de mudança, aceita por Newton, é similar à concepção de velocidade de Galileu. Newton estudou o problema da tangente pelo método de combinar as velocidades componentes de um ponto, movendo-se em um sistema conveniente de coordenadas. Assim, a velocidade ou taxa de mudança de variável (a fluxão) era para ele fundamental.

Escreveu, no verão de 1669, um breve compêndio contendo seus resultados, intitulado *De Analysisi*. Embora tal obra não fosse publicada até 1711, continha uma parte dos trabalhos de Newton, compreendendo o período de 1664-1666.

O pensamento de Newton, de fato, era empírico. Considerou toda tentativa em relação à questão da instantaneidade de movimento como ligada à metafísica, evitando apresentar definições. Suas investigações de tangentes, por meio da composição de movimentos, tornaram-se fontes de suas aplicações geométricas e a base de seu *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*²⁵, sua segunda e mais extensa exposição sobre o cálculo, correspondendo a suas investigações dos doze anos precedentes. Nesse livro, relacionou suas quantidades variáveis como geradas pelos movimentos contínuos de pontos, linhas e planos, em vez de agregados de elementos infinitesimais, visão que havia aparecido em sua obra anterior: *De Analysisi*. Newton tomou o movimento contínuo como fundamental em seu sistema. O conceito da velocidade de um ponto ao longo de uma linha reta foi considerado como intuitivamente evidente. Não viu necessidade de se estabelecer uma definição para tal conceito; chamou de fluxão a razão de geração, e fluente a quantidade gerada. No

²³ Ou em termos atuais, Newton toma a derivada como a idéia básica, e a integral é definida em função dessa.

²⁴ O termo razão instantânea de mudança é o que hoje denominamos de taxa instantânea de variação.

²⁵ Esta obra foi escrita por volta de 1671, porém, não fora publicado até 1736. No entanto, utilizou-a nas duas cartas que enviou a Leibniz em 1676. A primeira parte dessa obra traz uma versão ampliada do *De Analysisi* e inclui uma discussão elaborada de técnicas de séries infinitas para solucionar equações algébricas e diferenciais. Segue uma coleção detalhada, estabelecendo formalmente doze problemas, onde aplica suas séries e seu método fluxional.

*Methodus Fluxionum*²⁶ o infinitamente pequeno de Newton tem a forma dinâmica do momento de Galileu ou do *Conatus* de Hobbe.

Num terceiro estágio, caracterizado por sua obra *De quadratura curvarum*²⁷, Newton procura eliminar todos os traços do infinitamente pequeno. Nessa, a quantidade matemática não foi considerada como consistindo em momentos (ou partes muito pequenas) descritos por movimentos contínuos. No entanto, em suas ilustrações sobre o método de fluxões, recorre à terminologia infinitesimal de suas considerações anteriores. Assim, embora tenha usado os momentos infinitamente pequenos em seus primeiros trabalhos, e, em seus últimos, buscado evitá-los, fazendo uma exposição em termos de fluxões e razões primeiras e últimas, o próprio Newton não admitiu uma mudança em seu ponto de vista e, além do mais, suas razões primeiras e últimas, a menos que interpretadas sob o conceito de limite ou princípio de continuidade, envolvem o infinitamente pequeno.

Em vista disso, esse terceiro estágio também não é isento dos infinitesimais. Além do mais, em seu *Principia*, considerado, algumas vezes, como uma explicação do cálculo de suas primeiras publicações, insistiu em suas considerações infinitesimais. Também, nessa obra, apresentou, como essencialmente equivalentes²⁸, os três modos de interpretar sua nova análise: (i) em termos infinitesimais, usados no seu primeiro livro, *De Analysis*; (ii) em termos de razões primeiras e últimas, apresentadas, em particular, no *De quadratura*; (iii) em termos de fluxões, dados em seu *Methodus fluxionum*.

Newton foi o primeiro a ter em mente quantidades infinitamente pequenas, que não são nem finitas e nem precisamente o zero.

O trabalho de Newton tinha, com efeito, um caráter mais intuitivo. Sua visão de limite, por exemplo, principalmente a de seus trabalhos iniciais, era baseada em intuições geométricas. Não concebeu o limite aritmeticamente, i.e., como uma seqüência de números representando as razões de comprimentos (aritméticos) das quantidades geométricas envolvidas, e como esses últimos tornam-se infinitamente pequenos.

Influenciado pela visão do século XVII, foi levado a pensar sobre os indivisíveis geométricos últimos, e, em sua teoria, utiliza termos como razões e formas últimas, expressões que seguem de interpretações abstratas rigorosamente corretas, mas que sugere fortemente outras, em termos de uma visão intuitivamente mais atrativa, produzida pelos infinitesimais. O conceito de limite de Newton era fortemente dependente da idéia do

²⁶No *Methodus fluxionum*, Newton afirma claramente o problema fundamental do cálculo: dada a relação entre quantidades ($f(x,y)=0$), encontrar a relação entre os fluxões dessas x/y , ou seja encontrar a razão o que corresponde hoje à derivada de y com respeito a x (dy/dx); e inversamente, ou seja, encontrar x e y dada uma equação expressando x e a razão x/y de seus fluxões (em termos atuais corresponde a antidiferenciação). No quinto e sexto problema discutido por Newton no tratado de 1666, ele apresenta o cálculo da área por meio da antidiferenciação. Esta foi o primeiro aparecimento histórico do teorema fundamental do cálculo na forma explícita: $dA/dx = y$ (onde A denota a área sob a curva $y=f(x)$).

²⁷Foi a última a ser escrita (1691-1693), porém a primeira a ser publicada (1704) - apareceu como um apêndice matemático na edição de seu *Opticks*.

²⁸O método de fluxões, por exemplo, depende de um outro para a determinação das relações básicas entre os fluxões. Newton aparentemente preferiu ligar o método de fluxões à idéia de razão limitante embora, freqüentemente, tenha usado os infinitesimais.

infinitamente pequeno. Essa dependência pode ser percebida em seu *Principia*, quando fala sobre a natureza das razões últimas e ainda apresenta seus três modos como equivalentes, como já destacamos acima.

Concomitantemente, Leibniz também se envolveu com problemas semelhantes²⁹, porém seu ponto de vista era bem diferente do de Newton. Buscou colocar todas as considerações infinitesimais sob procedimentos algorítmicos, estando presente em seus trabalhos uma forte tendência aritmética e formal. Tendo por projeto de vida procurar uma linguagem universal para padronizar e mecanizar todo processo do pensamento racional humano, buscou criar um sistema de notação e terminologia que pudesse codificar e simplificar elementos essenciais do raciocínio lógico. Tal intento foi alcançado, em particular, em seu cálculo infinitesimal, ao qual proporcionou um método algorítmico geral que permitiu unificar resultados e técnicas até então existentes.³⁰

Enquanto Newton criou regras para os fluxões básicos em seu método e começa em seu *Principia* encontrando o momento do produto AB , Leibniz determina a diferença do produto xy , pois considerou as operações de encontrar “diferenças” (método de proceder para determinar somas e diferenças de infinitesimais) como fundamental em seu “cálculo diferencial e somatório”. Em 1673, ao ler o *Traité des sinus du quart de cercle* de Pascal, percebeu que a determinação da tangente à curva depende da razão de diferenças nas ordenadas e abscissas, à medida que essa se torna infinitamente pequena; e que a quadratura depende da soma das ordenadas, ou retângulos infinitamente reduzidos, para intervalos infinitesimais na abscissa. Disso aparece duas idéias centrais de seu cálculo: a transformação de integrais por meio de substituição e a redução de problema de quadratura a problemas inversos aos de tangente.

Newton e Leibniz tinham posições diferentes quanto à determinação de integral e mantiveram diferenças também com respeito à definição desse conceito. O primeiro definiu o fluente como a quantidade gerada por um fluxão dado, isto é, como a quantidade tendo uma grandeza dada como seu fluxão, ou como o inverso desse último. Sua ênfase foi na integral indefinida. Já, o último definiu a integral como a soma infinita de diferenciais ou soma de um número infinito de retângulos infinitamente reduzidos (modernamente, como o limite de uma certa soma característica). Sua ênfase foi na integral definida.³¹

²⁹ É somente por volta de 1676 que Newton toma conhecimento de que Leibniz estava trabalhando com tais problemas.

³⁰ Cf. Edwards (1937).

³¹ Porém, ambos tinham consciência dos dois tipos de integrais. Ademais, uma contribuição comum entre eles foi que os dois exploraram a relação inversa entre quadraturas e problemas de tangente.

As posturas filosóficas de Leibniz e Newton e suas contribuições para a edificação do Cálculo

Leibniz enfatizou a natureza algorítmica do método e não se voltou à intuição geométrica para obter uma clarificação. Para ele, se as regras fossem formuladas apropriadamente e aplicadas convenientemente, alguma coisa racional e correta deveria resultar; entretanto, nenhuma clareza era exigida quanto ao significado dos símbolos envolvidos. Com isso, em particular no desenvolvimento do cálculo, é possível perceber a postura de Leibniz em enfatizar o aspecto lógico do conhecimento e em menosprezar o aspecto intuitivo. Ao passo que Newton tem uma posição oposta, ou seja, enfatiza o intuitivo, não dando tanto valor para o aspecto lógico. Abaixo enfatizaremos situações que reforçam isso.

Enquanto Newton tenha usado a concepção infinitesimal em seus trabalhos iniciais, negando-a somente mais tarde, e tenta estabelecer a idéia de fluxões na doutrina das razões primeiras e últimas de diferenças finitas, i.e., em termos de limites, Leibniz caminha em outra direção. Iniciando com diferenças finitas, suas concepções infinitesimais são confirmadas, meramente, mediante os sucessos operacionais em seu método diferencial.

Além do mais, Leibniz não acreditava na existência do “infinito” e do ‘infinitamente pequeno” considerou-os como “ficções úteis para abreviar e falar universalmente”³². A ligação entre essas ficções e a realidade encontrava-se em sua lei de continuidade.

Em 1700 Leibniz apresentou, num manuscrito não publicado, a seguinte posição:

“(...) será suficiente se, quando falarmos de quantidades infinitamente grandes (ou mais precisamente não limitadas), ou de quantidades infinitamente pequenas (ou seja, muito menores do que as que conhecemos), entendermos quantidades que são indefinidamente grandes ou pequenas, ou seja, tão grandes quanto se queira ou tão pequenas quanto se pretenda; de forma que, o erro que qualquer uma determina possa ser menor do que uma certa quantidade designada. Além disso, desde que, em geral, pareça que quando algum pequeno erro é determinado mostra-se que ele seria ainda menor, segue que o erro é absolutamente nada (...) será suficiente tão-somente fazer uso delas (quantidades infinitamente grandes e infinitamente pequenas) como um instrumento que tem vantagens para o propósito do cálculo; da mesma forma que os algebristas retêm as raízes imaginárias com grande proveito, como um meio hábil de ajustar os cálculos (...)”³³

Ao passo que Newton encontrou na noção de velocidade uma base que para ele parecia satisfatória, Leibniz preferiu tal fundamento no diferencial. Além disso, Leibniz buscou o tempo todo pela formulação de algoritmos e métodos gerais, enquanto Newton teve-se mais na resolução de problemas particulares.

³² Cf. Opera omnia (Duten), III, 500, apud Boyer, 1949, p.219.

³³ Edwards, 1937, pp.264-265.

Há também um outro fato interessante, a saber, que embora Leibniz tenha tomado conhecimento do trabalho de Newton, por meio das cartas que recebera deste último em 1676³⁴, em suas publicações, em nenhum momento Leibniz citou Newton³⁵. Teria isso a ver com suas posturas filosóficas? Ou seja, o fato de Leibniz não ter reconhecido o trabalho de Newton poderia estar significando que, uma vez tendo a postura de um racionalista, não conceberia o caráter empírico, presente no trabalho de Newton, como importante ao desenvolvimento do cálculo, e, portanto, não mencionou tal trabalho.

Com tudo isso, fica que, embora de linhas filosóficas diferentes, tanto o trabalho de Newton como o Leibniz foram extremamente importantes para o desenvolvimento do cálculo. Suas contribuições, conjuntamente, colaboraram para a edificação desse campo de saber; isoladamente, mostraram-se insuficientes, uma vez que há conceitos envolvidos nos dois métodos que não foram totalmente clarificados.

Newton deu três interpretações de seu procedimento, como relatamos anteriormente, e, ainda que tenha indicado uma preferência para a noção de razões primeiras e últimas, como a mais rigorosa, não as elaborou em um sistema lógico cuidadoso. Leibniz manifestou uma falha geral de decisão, pois, mesmo tendo utilizado o tempo todo o método infinitesimal, considerou os próprios infinitesimais, variavelmente, como não assinaláveis, como zeros qualitativos e como variáveis auxiliares. Ele também não foi capaz de explicar a transição das grandezas finitas para as infinitas. Baseou seu cálculo em sua lei de continuidade; no entanto, usou tal idéia muito vagamente.

Assim, da mesma forma que o cálculo de Newton deixou questões em aberto, o mesmo ocorreu com o de Leibniz. Somente a partir do conceito geral de número abstrato, foi possível interpretar claramente tanto o cálculo fluxionário como o cálculo diferencial em termos de limite de uma seqüência de razões ou números, mas esta interpretação não foi, em geral, aceita até mesmo no século seguinte.

Considerações

Enfim, a análise desse episódio histórico mostrou-nos que a matemática, em seu desenvolvimento, é grandemente influenciada pelos rumos tomados pela filosofia e, ademais, foi aqui também possível evidenciar que o cálculo se solidificou pelas contribuições tanto da linha empirista como da racionalista, sem ser possível, do nosso ponto de vista, atribuir-se maior valor a uma ou a outra; o que reforça a posição, então posta na filosofia de Kant, de que tais correntes não devem ser vistas como separadas, opostas ou excludentes, mas que elas se completam, ambas foram e são importantes no desenvolvimento do conhecimento matemático.

³⁴ Newton anunciou suas séries binomiais e descreveu suas descobertas em duas cartas de 1676, enviada a Henry Oldenburg, secretário da Royal Society de Londres, para que fosse transmitida a Leibniz. Tais cartas estabeleceram as prioridades de Newton em seus trabalhos iniciais, que relata a partir do *De Analysis* e do *De Methodis*.

³⁵ Embora o auge das descobertas de Newton tenha sido 1664-1666 e o de Leibniz de 1672-1676, a primeira publicação de Leibniz sobre cálculo foi publicada em 1684 no *Acta Eruditorum*, vinte anos antes da primeira de Newton, 1704 (*“De Quadratura”*).

Do ponto de vista do ensino do cálculo, considerar os aspectos intuitivos e lógicos como complementares parece, de fato, ser pertinente. A esse respeito, destacamos aqui o trabalho de Reis (2001), que após ter constatado³⁶ que há, no ensino de cálculo e de análise, um desequilíbrio entre dois pólos do par tensorial rigor x intuição, enfatizando-se o primeiro desses pólos em detrimento do segundo, defende que, em tal ensino, rigor e intuição devem ser considerados equilibradamente, pois, ambos cumprem papéis importantes e complementares na formação do pensamento e do conhecimento diferencial, integral e analítico, tanto do professor de matemática como do próprio matemático.

Por fim, entendemos que esse trabalho aponta para a necessidade de se conceber filosofia, história, matemática e educação matemática como fazendo parte de um mesmo processo, influenciando-se, umas às outras, no desenvolvimento do saber.

Mais do que isso, eis como a fina sensibilidade do matemático Tom M. Apostol percebe, claramente, esse imperativo. Citamos, então, passagens do Prefácio à primeira edição de seu famoso livro “*Calculus*”, conforme aparece em sua segunda edição:

“Parece não existir concordância no que deveria constituir um primeiro curso de cálculo e geometria analítica. Alguns argumentam que o único meio de entender, realmente, o cálculo é começar com um tratamento completo do sistema de números reais e desenvolver o assunto, passo a passo, de um modo lógico e rigoroso. Outros insistem que o cálculo é, antes de tudo, um instrumento para engenheiros e físicos; e, por conseguinte, que o curso deva enfatizar aplicações do cálculo, apelando à intuição, para depois, através de exercícios na resolução de problemas, alcançar destreza operatória. Há muito de correto em ambos os pontos de vista. O cálculo é uma ciência dedutiva e um ramo da matemática pura. Ao mesmo tempo, é muito importante lembrar que o cálculo tem fortes raízes em problemas físicos, e que muito de seu poder e beleza deriva da variedade de suas aplicações. É possível combinar um desenvolvimento teórico rigoroso com uma sólida formação técnica; este livro representa uma tentativa de atingir um equilíbrio sensível entre os dois.

(. . .)

*A abordagem, neste livro, foi sugerida pelo desenvolvimento histórico e filosófico do cálculo e da geometria analítica.”*³⁷

³⁶ Mediante análise de livros didáticos.

³⁷ Apostol, 1967, prefácio.

Bibliografia

- APOSTOL, Tom M. *Calculus*, vol.I, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1967.
- BERKELEY, G. *The Principles of Human Knowledge*, Enciclopédia Britânica ‘Great Books’, 1980.
- BICUDO, I. *Platão e a Matemática*, Revista Letras Clássicas, n.2, pp.301-315, 1998.
- _____: *Análise Não-Standard*, Bolema n.8, ano7, pp.60-67, 1992.
- BOYER, C.B.: *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, Dover Publications, IC., New York, 1949.
- BOYER, C. B. - *História da Matemática*, tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo (SP), 1974.
- EDWARDS, JR., C.H.: *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag- New York, 1979.
- DESCARTES, R. *Regras para a Direcção do Espírito*, Tradução de João Gama, Lisboa, edições 70.
- _____, R. *Discurso do Método*, comentários de Denis Huiman, editora ática, 1989.
- _____, R. *The Geometry*, Dover Publications, Inc. New York, 1925.
- DEMOPOULOS, W. , *Frege’s Philosophy of Mathematics*, Havard University Press - Cambridge, Massachusetts- London, England, 1995.
- ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education*, Bristol: The Farmer Press, 1991.
- FREGE, G.: *Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought* , 1879 In Heijenoort, V.: *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931*, Havard University Press, Cambridge, Madschutts, 1971, pp. 1-82.
- _____: *Os Fundamentos da Aritmética* (1884). Trad. L.H. Santos, Os Pensadores v.6, São Paulo, Abril, 1983.
- _____: *The Foundations of Arithmetic*,(1884). 2a ed. Revised; English Translation by J. L. Austin, M.A- Basil Blackwell- Oxford, 1959,238p.
- FIorentini, D. *Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil*, Revista Zetetiké, ano 3, n.4, 1995.
- GRATTAN-GUINNESS. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*, Duckworth, 1980.
- HEIJENOORT, V.: *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical Logic 1879- 1931*, Havard University Press, Cambridge, Madschutts, pp.1-82, 1971.
- HUME, D.: *Tratado de la Natureza Humana/I(1739)*, editora Nacional, Madrid, edição preparada por Felix Duque, 1981.
- HUME, D.: *An Enquiry Concerning Human Understanding* (1748), Enciclopédia Britânica ‘Great Books’, 1980.
- LEIBNIZ, G. W. *Novos Ensaios Sobre o Entendimento Humano*. Trad. Luiz João Baraúna, Coleção “Os Pensadores” Editora Nova Cultural Ltda, 1996.
- KLINE, M. *O Fracasso da Matemática Moderna*, São Paulo, IBRASA, 1976.
- LOCKE, J. *Na Essay Concerning Human Understanding*, Enciclopédia Britânica ‘Great Books’, 1980.

- MENEGHETTI, R.C.G.: *Da Lógica de Aristóteles à Lógica Formal: um entendimento da obra "Begriffsschrift" de Frege*, in anais V EPEM- V Encontro Paulista de Educação matemática, pp. 263-267, SBEM-SP- FIRP/UNESP, São José do rio Preto, 14-17 de janeiro de 1998.
- MENEGHETTI, R.C.G.: História e Filosofia da Matemática em Frege in anais Reunião do Grupo Internacional de Estudos sobre as Relações entre História e Pedagogia da Matemática- UNISAL- Centro Universitário Salesiano, 26 e 27 de julho de 1998.
- MENEGHETTI, R.C.G. *Logicismo: prós e contras* in anais- III Seminário Nacional de História da Matemática- 28-31 março de 1999- Universidade Federal do Espírito Santo- Vitória-ES- Br.
- MENEGHETTI, R.C.G. *Logicismo x Intuicionismo* – in anais – VII Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia- de 1 a 4 de agosto de 1999; PUC- SP, Campus Marquês de Paranaguá, São Paulo-SP.
- MENEGHETTI, R.C.M. *O Intuitivo e Lógico na Conhecimento Matemático: uma análise à luz da história e da filosofia da matemática*, tese de doutorado em Educação Matemática- Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro, Rio Claro/SP, maio de 2001.
- MORENTE, M.G. Fundamentos de Filosofia, Editora Mestre Jou, São Paulo, 1970.
- OLIVEIRA, T.A. *Análise Não-Standard uma Apologia ao seu Ensino* UNESP-IGCE, Rio Claro 1993, Dissertação de Mestrado.
- PALÁCIOS, A.R. & PALÁCIOS, A. G. (P&P), *Geo-Home-Trío & Geometría: Matemática e Filosofia*, Editorial Lumen, Argentina, 1999.
- PLATÃO: *A República*, Introdução e nota de Robert Baccou, tradução de J.Guinsburg, São Paulo, Difusão Européia do Livro, 1973.
- REIS, Frederico da Silva. A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese de Doutorado. Campinas, FE/Unicamp, 2001.
- RESNIK, M. D., *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca and London, 1980.
- RUSSELL, B. *Principles of Mathematics*, Cambrid University Press, Cambridge, 1903.
- SILVA, J., *Notas de aulas*, disciplina: Filosofia da Matemática- IGCE- pós-graduação em Educação Matemática- UNESP, Rio Claro, 1993.
- SNAPPER, E.: *The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuicionism and Formalism*, Mth. Mag., vol. 52, n.4, september 1979, pp.207-216.
- TILES, M. *Mathematics and the Image of Reason*, Routledge, London and New York, 1991.
- VILELA, D.V. *Análise das Críticas de Frege a Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições* - Dissertação de Mestrado- Universidade Estadual de Campinas, IFCH, Campinas, SP, 1996.
- WHITEHEAD, A.N. and Russell, B. *Principia Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, England In HEIJENOORT, V.: *From Frege to Gödel: A Source Book Mathematical logic 1879-1931*, Havard University Press, Cambridge, Madschutts, 1971.

WILDER, R.L.: *Introduction to The Foundations of Mathematics*- second edition, Wiley International Edition- John Wiley & Sons. Inc. New York- London- Sydney, 1965.

Renata C. Geromel Meneghetti: Departamento de Matemática – ICMC – USP.

e-mail: rcmg@icmc.sc.usp.br.

Irineu Bicudo: Departamento de Matemática – IGCE – UNESP.

e-mail: ibicudo@rc.unesp.br

que precisava ir na pessoa certa e quando ela se viu diante de Eliseu quando ele da parte de Deus lhe perguntou o que havia acontecido ela chorou a sua dor Tem certas coisas em nossa vida que por mais que a gente sofra por dentro nem todos estÃ£o aptos a nos ouvir nem todos estÃ£o crescidos o bastante para nos aconselhar nos. emprestar um ombro amigo nos dar colo sem questionar julgar nem todos estÃ£o preparados para nos fortalecer e precisamos acima de tudo erguer a cabeÃ§a e exercermos a nossa fÃ© diante das circunstÃ¢ncias para que um milagre aconteÃ§a sem que as desistÃªncias e o desespero nos abr Desenvolvimento pessoal e profissional, aprendizagem acelerada, motivaÃ§Ã£o, criatividade, desenvolvimento de competÃªncias e inteligÃªncias, mapas mentais, programaÃ§Ã£o neurolinguÃstica, pnl, idiomas, inglÃªs, constelaÃ§Ãµes familiares, hipnose.Â Ao longo da histÃ³ria, nÃ³s dependemos de mÃ¡quinas para sobreviver. O destino parece, nÃ£o deixa de ser irÃ´nico. O corpo humano gera mais bioeletricidade do que uma bateria de 120 volts e mais de 25 mil BTUs de calor corpÃ³reo. Combinado com uma espÃ©cie de fusÃ£o, as mÃ¡quinas encontraram mais energia do que precisariam. HÃ¡ campos, Neo, campos sem fim, onde os seres humanos nÃ£o mais nascem. Translation article entitled "Ensinar o inglÃªs como segunda lÃngua ".Â Os que praticam essa atividade o fazem, ou com profissionais desejosos de aprender o inglÃªs para o trabalho ou com estudantes e alunos de idades diferentes que precisam melhorar nessa Ã¡rea. Algumas pessoas tambÃ©m tÃªm a aprendizagem do inglÃªs como alvo pessoal. Na maioria dos casos ensina-se uma Ãªnica pessoa ou um grupo pequeno , o que significa que tanto as matÃ©rias estudadas, como a maneira de as estudar e os mÃ©dios usados deverÃ£o ser adaptados a cada cliente. Por isso, aqui serÃ£o dados comentÃ¡rios gerais sobre como ensinar dois grupos distintos : profissionais e estudantes.